1. *Bergamo.* Frammento epigrafico latino scoperto in via s. Alessandro. Resti di antiche costruzioni presso *Porta s. Agostino.* Tomba romana rimessa in luce a *Fontana brolo.* — 2. *Ghisalba.* Avanzi di suppellettile funebre di età romana trovati nel campo *Cioffi*, tra Ghisalba e Malpaga. — 3. *Torre dei Busi.* Ripostiglio di monete romane scoperte nelle vicinanze del paese. — 4. *Fornovo d'Adda.* Altre monete romane rinvenute nel territorio del comune. — 5. *Carobbio.* Tomba romana nella località *Scurizzi*, ove è stato costruito il nuovo cimitero. — 6. *Commenduno.* Altre tombe romane nel campo della *via Fosca.* — 7. *Albegno.* Tegoloni fittili nel podere *s. Martino.* — 8. *Calcio.* Pavimenti in musaico e resti di costruzioni nel podere *Vallone.* — 9. *Bovolone.* Avanzi antichissimi nel fondo *Palù vecchio.* — 10. *Verona.* Tombe antiche scoperte presso il nuovo ricovero di mendicità. — 11. *Mozzecane.* Oggetti barbarici in una tomba trovata nella proprietà Miniscalchi in *Pizzale.* — 12. *Colognola dei Colli.* Arma barbarica trovata a *s. Reno, s. Ambrogio di Valpolicella.* — 13. *Convento di s. Giov. Ingannapoltron.* Cippo con iscrizione latina inedita esistente nel chiostro di s. Giorgio Ingannapoltron. — 14. *Buttrio.* Antichi oggetti scavati presso il cimitero e presso la strada *Barigliaria.* — 15. *Scorticata.* Cippi iscritti rinvenuti lungo i resti dell'antica via. — 16. *Verucchio.* Ascie di bronzo scoperte presso il paese. — 17. *Rimini.* Frammento di cippo sepolcrale nel fondo Falaschi. — 18. *Chiusi.* Resti di antiche costruzioni nella collina di s. Benedetto. — 19. *Fabro.* Tomba scoperta nel predio *i Casali.* — 20. *Orvieto.* Tombe in contrada *Canicella.* — 21. *Bolsena.* Antiche lapidi presso la chiesa di s. Cristina. — 22. *Carbognano.* Sepolcro falisco a nord del paese. — 23. *Corneto-Tarquinia.* Scavi della necropoli tarquiniese di Monterozzi. — 24. *Roma. Civita-Lavinia.* Avanzi di edificio termale ed iscrizione latina presso la nuova casa municipale. — 25. *Pompei.* Scavi nell'isola 5, reg. VI. — 26. *Cava dei Tirreni.* Cippo sepolcrale in contrada *s. Stefano.* — 27. *Montenerodomo.* Scoperte in *Santa Maria del Palazzo.* — 28. *Sulmona.* Altre tombe della necropoli sulmonense. — 29. *Introdacqua.* Sepolcro con iscrizione latina presso *Piè Tassito.* Fittili rinvenuti in vicinanza della *Mandolella.* — 30. *Lucera.* Musaico rinvenuto nel giardino già dei missionarî del SS. Sacramento. — 31. *Terranova-Pausania.* Tomba scoperta in contrada *Acciaradolsa.* — 32. *Sant'Antico.* Iscrizione bilingue, latina e punica scoperta nel territerio dell'antica Salci.

Richiama poi l'attenzione della Classe sopra questa iscrizione bilingue, della quale presenta il calco.

---

La Classe adunatasi all'una pomeridiana, si sciolse dopo due ore di seduta.

---

La seguente Nota fu presentata nella seduta del 5 giugno. Nel rendiconto di quella seduta ne fu dato soltanto breve sunto, non essendosi potuto aver pronto per quel tempo il testo intero.

**Matematica** — VERONESE G. *Alcuni teoremi sulla geometria a n dimensioni.* Nota presentata dal Socio BATTAGLINI nella seduta del 5 giugno 1881.

« I teoremi, che qui enuncio senza dimostrazione, sono i teoremi principali d'un mio lavoro già finito e che presto verrà pubblicato. Mentre finora alcune parti della geometria a $n$ dimensioni, in ispecial modo quella che riguarda la curvatura degli spazî, sono state trattate col metodo analitico, io ho sviluppato il mio lavoro col metodo sintetico con l'aiuto delle due operazioni fondamentali *proiettare e segare*. Qua e là ho adoperato anche il metodo analitico, specialmente dove tratto delle curve di genere $p$ qualunque, ma subordinandolo sempre al metodo intuitivo, dirò così plastico, che scaturisce da quelle due operazioni fondamentali. Per studiare le proprietà projettive di una curva o di una superficie nello spazio a tre dimensioni, egli è in molti casi conveniente di cercare un ente geometrico ad una o a due dimensioni nello spazio a $n$ dimensioni $R_n$, dal quale la curva o superficie data si possa ottenere come projezione o come sezione; il quale ente geometrico diventa sempre più semplice rispetto alle sue singolarità quanto più si aumenta il numero delle dimensioni dello spazio $R_n$. E così non solamente si può studiare quella data curva o superficie, ma ancora un' intera *classe* di curve o superficie, che si ottengono da quell'ente geometrico projettandolo in tutti i modi possibili. Consideriamo per esempio quattro punti del piano, purchè non situati tutti in una retta; essi si possono ottenere come projezione dai vertici d'infiniti tetraedri dello spazio a tre dimensioni. Ora $n+1$ punti qualunque del piano o dello spazio a tre, a quattro ecc. a $n-1$ dimensioni sono sempre la projezione dei vertici di infinite piramidi di $n+1$ punti nello spazio $R_n$. E viceversa data una tal piramide in $R_n$ si possono ottenere da essa mediante projezione tutte le specie di configurazioni di $n+1$ punti sul piano, nello spazio a tre ecc. dimensioni, intendendo che due configurazioni sono della stessa specie quando gli $n+1$ punti di esse sono disposti nella stessa guisa.

« Se consideriamo per esempio la curva razionale d'ordine $n$ in $R_n$, da essa, projettandola in tutte le maniere possibili, si ottengono tutte le curve razionali d'ordine $n$ o minore di $n$ negli spazî a meno di $n$ dimensioni. Ma la $C^n$ in $R_n$ è affatto generale e non ha singolarità di sorta e si può generare mediante dei fasci projettivi ecc; è chiaro adunque che lo studio delle diverse specie di curve razionali in uno spazio qualunque (e perciò anche nel piano e nello spazio a tre dimensioni) è reso molto più semplice mediante la $C^n$ in $R_n$. Cose analoghe hanno luogo per le altre curve.

« Conservo le denominazioni di punto, retta e piano nel senso adoperato comunemente, mentre gli spazî li chiamo col loro vero nome, cioè spazio a tre, a quattro ecc. a $n$ dimensioni, e li indico rispettivamente coi simboli $R_3$, $R_4$ ecc. $R_n$ con $R_0$, $R_1$, $R_2$, indico invece il punto, la retta e il piano. Chiamo curva o spazio ad una dimensione il luogo generato da un punto che si muove in due direzioni (avanti e indietro) secondo una data legge algebrica o trascendente e la dico dell'ordine $m$ se essa, essendo contenuta in uno spazio $R_n$, viene incontrata da uno spazio $R_{n-1}$ in $m$ punti. Analogamente chiamo superficie d'ordine $m$ e a due, tre ecc. $n-1$ dimensioni, uno spazio che viene incontrato da uno spazio $R_{n-1}$ in una curva, in una superficie a due, tre, ecc. $n-2$ dimensioni dell' ordine $m$. Ho dato le definizioni del parallelismo mediante lo spazio $R_{n-1}$ all' infinito dello spazio $R_n$ e quelle della perpendicolarità mediante la sfera immaginaria a $n-2$ dimensioni o per meglio dire mediante il sistema polare sferico a $n-1$ dimensioni all' infinito ».

*Teorema I.* — « Una superficie dell' ordine $m$ e di $p$ dimensioni $F_p^m$ (che è una curva quando $p = 1$) può essere contenuta negli spazî $R_{p+1}$ $R_{p+2}$ ecc., $R_{p+m-1}$, vale a dire una superficie $F^m$ di quante si vogliano dimensioni può essere situata in soli $m-1$ spazî. La superficie $F_p{}^m$ ha una superficie sviluppabile a $p+1$ dimensioni che può svilupparsi negli spazî $R_{p+1}$, $R_{p+2}$, ecc. $R_{n-1}$ quando essa sia contenuta in uno spazio $R_n$.

*Teorema II.* — Quando in uno spazio $R_r$ i vertici di $q-1$ piramidi di $p$ punti giaciono due a due rispettivamente in $p$ rette passanti per un punto O e si pone:

$$q = n - r + 2\,, \qquad p = N - (n - r + 1)$$

esse determinano mediante l'intersezioni dei loro spigoli, faccie piane, faccie a 3 dimensioni ecc., una figura completa di

$$\frac{N(N-1)\ldots(N-n+r)}{(n-r+1)!}R_0,\ \frac{N(N-1)\ldots(N-n+r-1)}{(n-r+2)!}R_1,\ldots\ \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}R_{r-1}$$

ciascun $R_0$ passano $N-(n-r+1)\,R_1$, $\dfrac{[N-(n-r+1)][N-(n-r+2)]}{2}R_2\ldots\ \dfrac{[N-(n-r+1)]\ldots[N-n+1]}{(r-1)!}R_{r-1}$

» $R_1$ » $N-(n-r+2)\,R_2\ldots\ \dfrac{[N-(n-r+2)]\ldots[N-n+1]}{(r-2)!}R_{r-1}$

» $R_{r-2}$ » $[N-(n-2)]\,R_{r-1}$

ciascun $R_1$ giaciono $(n-r+2)\,R_0$

» $R_2$ » $\dfrac{(n-r+2)(n-r+3)}{2}R_0$, $(n-r+3)\,R_1$

» $R_{r-1}$ » $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(r-1)!}R_0$, $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-2)!}R_1\ldots$

« Questa figura ha le stesse proprietà rispetto ad ogni suo punto o rispetto a tutti i suoi spazi: $R_1$, $R_2$ . . . ecc. $R_{r-1}$ delle medesime dimensioni. Per es. per ogni punto della figura si possono formare $q-1$ piramidi di $p$ punti, che giaciono due e due in rette passanti per esso e che dànno luogo alla stessa figura. Questa figura si può ottenere con la sezione fatta con uno spazio $R_r$ dalla configurazione completa di N punti nello spazio $R_n$. E per dualità può essere ottenuta anche come projezione d' una figura d'uno spazio a maggiori dimensioni di $R_r$.

« La figura così ottenuta in $R_r$ è duale di sè stessa se

$$N = 2n - r + 1$$

Come caso speciale si ottiene:

*Teorema III.* — « Quando i vertici di due piramidi di $r+1$ punti in $R_r$ sono due a due rispettivamente allineati con un centro di prospettiva O, gli spigoli e le faccie di diverse dimensioni corrispondenti delle due piramidi s'incontrano in spazî di uno spazio $R_{r-1}$ (spazio di prospettiva) che corrisponde al centro O.

« La figura completa è l'intersezione d' una configurazione di $r+3$ punti in uno spazio ad $r+1$ dimensioni. Essa contiene:

$$\frac{(r+2)(r+3)}{2}R_0,\ \frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{2\,3}R_1,\ \frac{(r+3)(r+2)(r+1)\,r}{2.3.4}R_2\ \text{ecc.}\ \frac{(r+2)(r+3)}{2}R_{r-1}$$

« Per ciascun punto $R_0$ passano $(r+1)\,R_1$, $\frac{(r+1)}{2}\,R_2 \ldots \frac{(r+1)r}{2}\,R_{r-1}$

» $R_1$ » $r\,R_2$ $\frac{r(r-1)}{2}R_{r-1}$.

ecc. ecc,

In ciascun $R_1$ giaciono $3\ R_0$

$R_2$ » $6\ R_0$, $3\ R_1$

$R_3$ » $10\ R_0$, $6\ R_1$, $4\ R_2$

ecc. ecc.

« In tal caso diciamo che le due piramidi sono prospettive.

« La figura completa di due piramidi prospettive di $r+1$ vertici si scompone in $r+3$ coppie di una piramide di $r+2$ vertici e di una piramide duale di $r+2$ spazî a $r-1$ dimensioni, che non hanno nessun spazio comune e che prese insieme determinano la figura completa.

*Teorema IV.* — « Due tali piramidi prospettive sono polari reciproche rispetto ad una ed una sola superficie di 2° grado a $n-1$ dimensioni, rispetto alla quale il centro di prospettiva ha per spazio polare lo spazio di prospettiva.

« La figura completa è adunque polare reciproca di sè stessa rispetto a quella superficie (¹).

« Le piramidi delle $r+3$ coppie del teorema precedente sono polari reciproche e polari (²) rispetto alla superficie, vale a dire l'equazione di essa riferita a queste piramidi non contiene che i quadrati delle variabili.

*Teorema V.* — « Ciascuna configurazione di $n+1$ o meno di $n+1$ punti di uno spazio qualunque $R_2$, $R_3$ ecc. $R_{n-1}$ può ottenersi colla projezione di una piramide di $n+1$ punti nello spazio $R_n$ (La piramide di $n+1$ punti in $R_n$ corrisponde al tetraedro nello spazio $R_3$).

« La stessa configurazione è data anche dalla sezione di uno spazio $R_2$, $R_3$ ecc. con una piramide fondamentale di uno spazio a maggiori dimensioni.

« Questo teorema mi sembra importante per lo studio di tutte le specie di configurazioni di $n+1$ punti sia nel piano come nello spazio a tre dimensioni.

*Teorema VI.* Se sono dati due gruppi di $n+1$ punti $A^{(1)} \ldots A^{(n+1)}$ $A'^{(1)} \ldots A'^{(n+1)}$ in due spazî qualunque $R_{n-1}$, $R'_{n-1}$ di $R$, essi si possono ottenere mediante successive projezioni e sezioni da $n+1$ punti qualunque $A''^{(1)} \ldots A''^{(n+1)}$ di un terzo spazio $R''_{n-1}$ o, ciò che è lo stesso, si possono ottenere mediante projezioni e sezioni successive l'uno dall'altro.

*Teorema VII.* — « In generale una superficie di 2° grado a $n-1$ dimensioni in uno spazio $R_n$ ove $n=2m$ contiene

$$\infty^{2.3.4\ldots(m-1)m}$$

(¹) Questa figura è la corrispondente in $R_r$ a quella di 10 punti e di 10 rette nel piano che io ho incontrato nell'esagrammo di Pascal (Atti della R. Acc. dei Lincei 1877).

(²) Nel senso come un pentaedro è polare rispetto ad una superficie di 2° grado in $R_3$.

spazî $R_{m-1}$, mentre la superficie di 2° grado a $n-1$ dimensioni in uno spazio $R_n$ ove $n=2m+1$ contiene due sistemi di

$$\infty^{3.3.4.\ldots.(m-1)m}$$

spazî $R_{m-1}$. Per $m=1$ si ha invece $2\ \infty^1\ R_1$, come è già noto.

*Teorema VIII.* — « Una curva $C^m$ in $R_n$ ove $m \geqq n$ ha in generale $3\,n$ caratteri piu il genere $p$, fra i quali hanno luogo $3\,(n-1)$ equazioni indipendenti fra loro più un' equazione pel genere, di modo che bastano 3 caratteri della curva, per es: ordine, genere e cuspidi, per determinare gli altri. La curva $C^m$ può inoltre avere $n-2$ elementi *stazionarî* (tangenti d' inflessione, piani stazionari ecc. spari stazionari a $n-2$ dim.) e $n$ elementi doppi (punto doppio, tangente doppia ecc.).

*Teorema IX.* — « Tutte le soluzioni intere e pesitive delle $3\,(n-1)$ equazioni (perciò anche delle equazioni di Plücker nel piano) per $p=o$ sono i caratteri di curve esistenti.

*Teorema X.* — « Una curva $C^m$ che ha in $R_n$ il massimo genere $p$ non può ricevere punti doppi o cuspidi oltre a quelli che già possiede senza che si abbassi il genere. Dico che due curve $C^m$ di genere $p$ in $R_n$ sono della stessa specie quando hanno gli stessi caratteri, fatta astrazione dai $3p-3$ moduli della curva; in caso contrario sono di diversa specie.

*Teorema XI.* — « Tutte le curve razionali d'ordine $n$ in $R_n$ sono della stessa specie. Chiamo perciò la curva razionale $C^n$ in $R_n$ una curva razionale normale dello spazio $R_n$.

« Tutte le curve razionali degli spazî $R_2$, $R_3$ ..... $R_{n-1}$ d'ordine $n$ o minore di $n$ si possono ottenere mediante la projezione da una $C^n$ in $R_n$. E viceversa da una curva razionale $C^n$ in $R_n$ si ottengono mediante projezione tutte le curve razionali possibili negli spazî $R_2$, $R_3$ .... $R_{n-1}$.

« Questo teorema come si vede è tanto importante quanto il teorema V sulle configurazioni di $n+1$ punti, perchè si possono studiare le singolarità e le specie delle curve razionali mediante lo studio di una curva razionale unica senza singolarità e che si lascia costruire semplicemente.

« Un analogo teorema ha luogo anche per le curve ellittiche di genere $p=1$ cioè:

*Teorema XII.* — « Tutte le curve ellittiche $C^{n+1}$ in $R_n$ sono della stessa specie, una $C^{n+1}$ dunque con $p=1$ è una curva ellittica normale dello spazio $R_n$.

« Ogni curva ellittica degli spazî $R_2$, ... $R_{n-1}$ d'ordine $n+1$ o minore di $n+1$ può essere ottenuta colla proiezione di una curva $C^{n+1}$ in $R_n$. E viceversa da una curva ellittica normale in $R_n$ si possono ottenere tutte le specie di curve ellittiche negli spazî $R_2$, $R_3$ ecc. $R_{n-1}$ mediante projezione.

« Naturalmente hanno luogo anche i teoremi correlativi.

*Teorema XIII.* — « La curva $C^{n+2}$ in $R_n$ può avere per massimo genere $p=2$, $C^{n+3}$ $p=3$ e $C^{2n-1}$ $p=n-1$.

« La legge non ha più luogo per $C^{2n}$ poichè essa può avere il genere $p=n+1$ (¹).

*Teorema XIV.* — « Le curve $C^{n+s}$ col massimo genere $p=s>1$ e $<n$ determinano diverse specie. Le chiamo curve normali d'ordine $n+s$ di genere $s$. Ogni

(¹) Questo teorema appartiene a Clifford. *On the Classification of Loci.* Philosoph. Transactions 1878.

curva d'ordine $n+s$ o minore di $n+s$ di genere $s$ negli spazî $R_2 \dots R_{n-1}$ è la projezione di una curva normale d'ordine $n+s$ e di genere $s$ in $R_n$. E viceversa projettando tutte le curve normali d'ordine $n+s$ e di genere $s$ negli spazî $R_2 \dots R_{n-1}$ si possono ottenere tutte le specie di curve d'ordine $n+s$ o minore di $n+s$ e di genere $s$ in essi contenute.

« Analoghi teoremi valgono per le superficie a due dimensioni ecc.

« Nel mio lavoro ho utilizzato questi teoremi per lo studio delle singolarità, come pure ho sviluppato la teoria delle superficie di 2° grado e degli enti geometrici che si ottengono mediante la combinazione di più forme projettive della stessa specie.

« Colgo questa occasione onde ringraziare il celebre prof. Klein, che durante il mio soggiorno di Lipsia mi fu largo d'ogni maniera d'indirizzi e di consigli nei miei studî matematici di perfezionamento ».